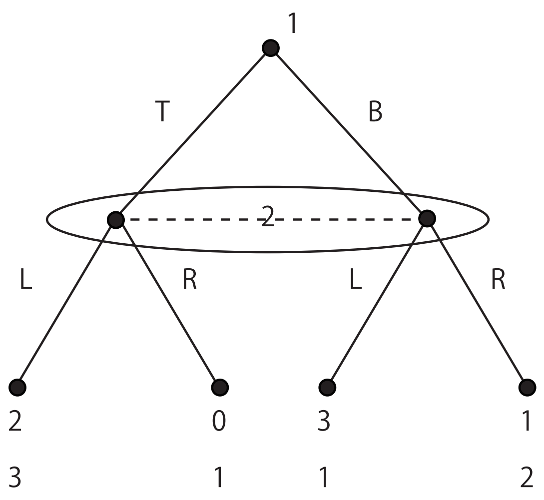
ゲーム理論入門　冬休みの友

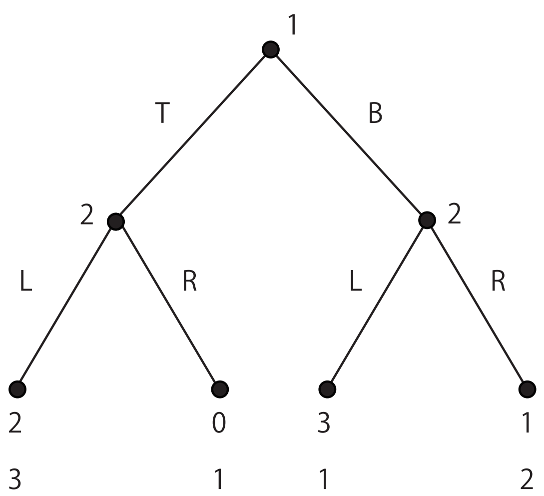
問題１　次の展開型ゲームを，利得行列によって表された標準型ゲームに書き換えなさい．その上で，ナッシュ均衡になる戦略の組合せを明らかにしなさい．なお，利得の１行目はプレイヤー１の，２行目はプレイヤー２の利得を表している．



問題２　次の展開型ゲームについて以下の設問に答えなさい．なお，利得の１行目はプレイヤー１の，２行目はプレイヤー２の利得を表している．

(1) この展開型ゲームを，利得行列によって表された標準型ゲームに書き換えなさい．その上で，ナッシュ均衡になる戦略の組合せを明らかにしなさい．

(2) このゲームの，部分ゲーム完全なナッシュ均衡を求めなさい．

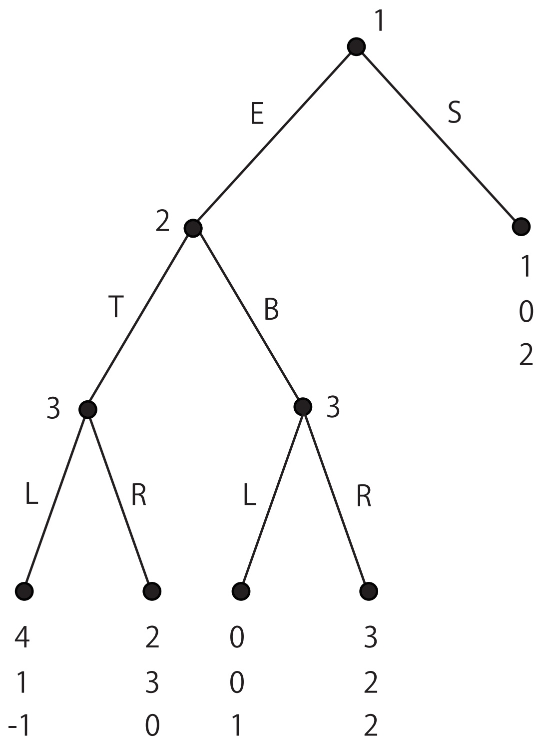


問題３　次の展開型ゲームについて以下の設問に答えなさい．なお，利得の１行目はプレイヤー１の，２行目はプレイヤー２の，３行目はプレイヤー３の利得を表している．

(1) このゲームにおいてプレイヤー $i = 1, 2, 3$ の持つ戦略の集合を S_i とする．S_1，S_2，S_3 をすべて明らかにしなさい（戦略の表記の仕方は，授業中に示したものに準拠してよいし，各自で考案してもよい）．

(2) このゲームのナッシュ均衡を，すべて明らかにしなさい．

(3) このゲームの，部分ゲーム完全なナッシュ均衡を求めなさい．

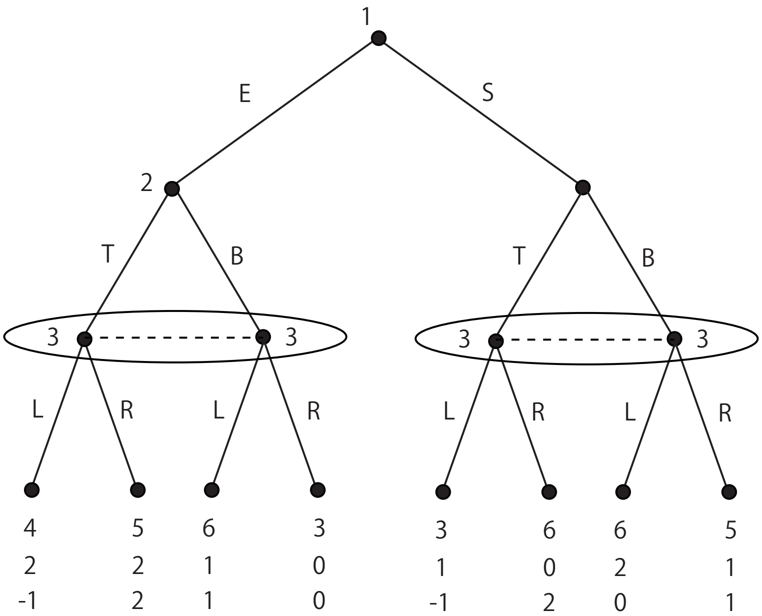


問題4　次の展開型ゲームについて以下の設問に答えなさい．なお，利得の1行目はプレイヤー1の，2行目はプレイヤー2の，3行目はプレイヤー3の利得を表している．

(1) このゲームにおいてプレイヤー$i = 1, 2, 3$の持つ戦略の集合をS_iとする．S_1，S_2，S_3を記述しなさい（戦略の表記の仕方は，授業中に示したものに準拠してよいし，各自で考案してもよい）．

(2) このゲームの，部分ゲーム完全なナッシュ均衡を求めなさい．

(3) このゲームのナッシュ均衡を，すべて明らかにしなさい．



問題5　ブランドの鞄を作っている2社AとBが，価格を戦略変数に，利潤最大化を目的として競争している．A社の鞄の価格がp_A円，B社のそれがp_B円のとき，A社の鞄の販売個数は

$$D_A = E - p_A + p_B,$$

B社の鞄の販売個数は

$$D_B = E - p_B + p_A,$$

と決まってくる（Eは正の定数）．各社の販売個数とも，自社が値上げすれば減少するが，他社が値上げすれば増加する性質を持っている．また，両者とも鞄1個をc円の費用で生産することができる（cは正の定数で，$E > c$を満たす）．以下の設問に答えなさい．

(1) 各社の利潤π_Aおよびπ_Bをp_Aおよびp_Bの関数として表しなさい．

(2) 各社とも，他社が設定する価格を知らないままで，自社の価格を設定しなければならないとしよう．

  (a) 横軸にp_A，縦軸にp_Bを測った平面図において，各社の反応曲線を描きなさい．

  (b) ナッシュ均衡で実現する価格の組合せを求めなさい（均衡価格はEとcだけで表せる）．

(3) A社が鞄の市場ではプライス・リーダーの位置にあり，B社はA社が設定した価格を見た後で，自社の価格を設定できるものとしよう（ただし，A社は一度決めた価格を変更できないとする）．

  (a) 部分ゲーム完全なナッシュ均衡の均衡経路上で各社が設定する価格を求めなさい．

  (b) 各社が部分ゲーム完全なナッシュ均衡で獲得する利潤を求め，価格を設定するゲームでは先攻 (first mover) と後攻 (second mover) のどちらが有利か，明らかにしなさい．

問題 6　次の段階ゲームを 2 回繰り返す，繰り返しゲームを考えよう．

		プレイヤー 2	
		C	N
プレイヤー 1	C	2, 2	0, 3
	N	3, 0	1, 1

各プレイヤーは 1 回目の段階ゲームが終わったとき，どの行動の組が選択されたのか知ることができ，その情報をもとに 2 回目の段階ゲームをプレイする．また，どちらのプレイヤーの割引因子も 1 とする．段階ゲームで選択された行動の組合せをゲームの結果を呼ぶことにして，以下の設問に答えなさい．

(1) この繰り返しゲームを，展開型で表現しなさい．

この繰り返しゲームにおけるプレイヤー $i = 1, 2$ の戦略 σ_i は，

$$\sigma_i = (x, y, z, u, v),\quad \text{ただし，} x, y, z, u, v \in \{C,\ N\}$$

という形で表現できる．ここで x は 1 回目の段階ゲームでプレイヤー i がとる行動，y は 1 回目の段階ゲームの結果が (C, C) のとき，z は 1 回目の結果が (C, N) のとき，u は 1 回目の結果が (N, C) のとき，そして v は 1 回目の結果が (N, N) のときにとる行動をそれぞれ表している．

したがって，たとえば $\sigma_1 = (C, C, C, C, C)$ であれば，1 回目は C，2 回目も 1 回目の結果にかかわらず C をとるというプレイヤー 1 の戦略を意味しているし，$\sigma_2 = (C, C, N, N, N)$ は，1 回目は C，2 回目は 1 回目の結果が (C, C) のときは C，それ以外は N をとるというプレイヤー 2 の戦略を表している．以下ではこの戦略の表現法を用いよう．

σ_1 と σ_2 が 1 つずつ決まれば，それによって 1 回目および 2 回目の段階ゲームの結果が決まる．たとえば上記の戦略をプレイヤー 1 と 2 がそれぞれとったならば，1 回目の結果は (C, C)，2 回目の結果も (C, C) である．そしてどちらのプレイヤーも利得 4 を獲得する．

(2) $\sigma_1 = (C, C, C, C, C)$，$\sigma_2 = (C, C, N, N, N)$ という戦略の組合せはナッシュ均衡ではないことを証明しなさい．

(3) σ_1 と σ_2 の組合せがナッシュ均衡であるならば必ず，1 回目の結果も 2 回目の結果も (N, N) でなければならないことを証明しなさい．

(4) この繰り返しゲームの部分ゲーム完全なナッシュ均衡をすべて求めなさい．

(5) プレイヤー 2 の戦略が $\sigma_2 = (N, N, N, N, N)$ だとする．これと組み合わせてナッシュ均衡になるプレイヤー 1 の戦略 σ_1 のうち，x から v のどこかに 1 つだけ C が入るものをすべて求めなさい．